МИНОБРНАУКИ РОССИИ

**Орский гуманитарно-технологический институт (филиал)
федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего образования «Оренбургский государственный университет»
(Орский гуманитарно-технологический институт (филиал) ОГУ)**

Кафедра математики, информатики и физики

Методические указания по выполнению и защите контрольной работы

по дисциплине

«Б.1.Б. 17 Математический анализ»

Уровень высшего образования

БАКАЛАВРИАТ

Направление подготовки
38.03.01 Экономика
(код и наименование направления подготовки)

Бухгалтерский учет, анализ и аудит
(наименование направленности (профиля) образовательной программы)

Тип образовательной программы
Программа академического бакалавриата

Квалификация
Бакалавр

Форма обучения
Заочная

Год начала реализации программы (набора)
2015, 2016, 2017

г. Орск 2017

Методические указания по выполнению и защите контрольной работы по дисциплине «Математический анализ» предназначены для обучающихся заочной формы обучения направления подготовки 38.03.01 Экономика профиля Бухгалтерский учет, анализ и аудит.

Составитель ____________________ А.С. Попов

Методические указания рассмотрены и одобрены на заседании кафедры математики, информатики и физики, протокол № 10 от «07» июня 2017 г.

Заведующий кафедрой ____________________ Т.И. Уткина

1 Общие требования по оформлению и защите контрольной работы

Оформление контрольной работы должно быть выполнено по единым требованиям, отраженным в стандарте оформления студенческих работ СТО 02069024.101-2015 «Работы студенческие. Общие требования и правила оформления». Режим доступа: http://www.osu.ru/docs/official/standart/standart_101-2015.pdf. С данным стандартом необходимо тщательно ознакомиться перед началом выполнения работы.

Контрольная работа выполняется с использованием компьютерной техники. При написании применяется текстовый редактор Word в Windows. Текст может располагаться только с одной стороны листов формата А4.

Выбор варианта контрольной работы осуществляется по порядковому номеру в журнале или по последним цифрам зачетной книжки, если иные критерии не установлены преподавателем дисциплины.

Если у студента отсутствует возможность выполнения контрольной работой дома, он может воспользоваться помещениями для самостоятельной работы обучающихся, для курсового проектирования (выполнения курсовых работ) (ауд. № 1-318, № 2-311, № 4-307) или компьютерным классом экономического факультета (ауд. 1-119).

Выполнение контрольной работы рукописным способом нежелательно, но не запрещается.

Теоретическая часть контрольной работы представляет собой исследовательскую работу студента по заданному вопросу. Теоретическая часть составляет 5-10 страниц текста. Значительные по объему таблицы, схемы, рисунки могут быть вынесены в приложения к работе.

Не разрешается скачивать и копировать текст из учебных источников и законодательных (нормативных документов). Текст должен быть полностью переработан. В случае использования источников в виде цитат, определений, понятий должны оформляться с указанием ссылки на применяемый источник.

Исследование предполагает написание выводов по изучению теоретического вопроса контрольной работы, которые как итог отображаются после каждого подраздела и общаются в заключении к работе.

Выполненная и оформленная контрольная работа должна включать:

- титульный лист, оформленный по стандарту;
- содержание, где последовательно отражаются наименования разделов и подразделов контрольной работы с указанием номера страницы, с которой начинается данный подраздел;
- введение;
- теоретическую часть, состоящую из одного вопроса, который разбивается на ряд подпунктов;
- практическую (расчетную) часть, предусмотренная конкретным вариантом задания (вариант задания выбирается по номеру зачетной книжки или порядковому номеру в журнале);
- заключение;
- список использованных источников, в котором отражаются все применяемые при написании контрольной работы студентом источники, на которые встречаются ссылки в работе и оформленные в соответствии со стандартом по оформлению студенческих работ;
- приложения (при наличии).

Сроки сдачи контрольной работы на кафедру устанавливаются в соответствии с утвержденным графиком учебного процесса по кафедре ведущим преподавателем.

В соответствии с внутренними правилами кафедры, срок для проверки контрольной работы – 10 календарных дней, включая день регистрации работы на кафедре.

Научный руководитель контрольной работы после ее проверки делает на титульном листе запись о допуске к защите. В случае выявления недостатков, ошибок и недочетов преподаватель указывает их на оборотной стороне титульного листа.

К защите допускается контрольная работа, всецело удовлетворяющая требованиям выпускающей кафедры и ВУЗа, как по содержанию, так и по соответствию приобретаемым компетенциям. Работа не проверяется и возвращается на доработку, если требования, по сути, и содержанию не выполнены, а также, если оформление не соответствует стандарту оформления.

К дате защиты контрольной работы, студенту необходимо устранить в ней обозначенные преподавателем недочеты, внести нужные дополнения и подготовить ответы на замечания. Доработка осуществляется непосредственно в контрольной работе ручкой на обороте листов, без «изъятия» замечаний преподавателя. Перепечатывание поверенной работы не разрешается.

Небрежно оформленная, выполненная не по стандарту или не скрепленная контрольная работа к проверке не принимается. По результатам проверки и/или защиты контрольной работы выставляется оценка «зачтено» или «не зачтено».

Работа, по результатам проверки которой выставлена оценка «не зачтено» возвращается студенту на доработку, до того момента, пока обучающийся не предоставит контрольную работу с исправлениями, он не может быть допущен экзамена по дисциплине.

При выполнении контрольной работы рекомендуется пользоваться перечнем основной и дополнительной литературы, периодическими изданиями и Интернет-ресурсами, указанными в рабочей программе дисциплины.

2 Варианты заданий для выполнения контрольной работы по дисциплине «Математический анализ» в 1-ом семестре

Тема 1. Введение в анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменных.

Вариант 1

Задание 1. Доказать, пользуясь определением предела Коши, что $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x+1}{x+2} = \frac{2}{3}$. Какое следует взять δ, чтобы в δ - окрестности точки $x_0=1$ выполнялось неравенство $\left|\frac{x+1}{x-2} - \frac{2}{3}\right| < \frac{1}{100}$

Задание 2. Записать в предельной форме утверждение $\forall\varepsilon>0\exists M>0\forall x\in E(|x|>M\Rightarrow|f(x)-1|<\varepsilon)$. Приведите графический пример функции с указанным свойством и изобразите построение числа M по заданному положительному числу ε.

Задание 3. Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\ln x - \ln 2}{x-2}$, б) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x}{(\frac{\pi}{2} - x)^2}$,

в) $\lim\limits_{x \to 1} (2x-1)^{\frac{1}{x-1}}$, г) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} - x}{2x+1}$, д) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x}$.

Задание 4. Исследовать функцию на непрерывность и построить ее график:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3|x| + 2, & при \quad x < 3{,}5 \\ \frac{1}{\pi}\arcsin(2x-8), & при \quad 3{,}5 < x \le 4{,}5 \\ \log_2 \frac{1}{2x-9}, & при \quad x > 4{,}5 \end{cases}$$

Задание5. Докажите, что функция $f(x)=|1-2x|$ не является дифференцируемой в т.$x_0=1/2$.

Задание 6. Вычислите производные y', если: а) $y = \frac{\arccos x}{\sqrt{x}} + \frac{2x-1}{1-x}$,

б) $y = \frac{\sqrt{x}\ln x}{1-x} + \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{tgx}{e^2}$, в) $y = (2x-1)^4 \arcsin\frac{1}{2x-1}$, г) $y = 2^{\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}}$.

Задание 7. Используя логарифмическое дифференцирование вычислить y′:

$$y=\frac{(x-1)^3(2x^2+1)^5}{\sqrt{(x-3)^3}}$$

Задание 8. Найти точку на параболе $y=2x-3-x^2$, в которой касательная перпендикулярна прямой $y=-x$.

Задание 9. Исследовать функцию и построить график: $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$

Задание 10. Из всех прямоугольников, у которых две вершины лежат на (-2, 2) оси абсцисс, а две другие – на графике функции $y=4-x^2$, найти прямоугольник наибольшей площади и вычислить эту площадь.

Вариант 2.

Задание 1. Доказать, пользуясь определением предела Коши, что $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+1}{x-2}=-3$. Какое следует взять δ, чтобы в δ - окрестности точки $x_0=1$ выполнялось неравенство $\left|\dfrac{x+1}{x-2}+3\right|<\dfrac{1}{100}$

Задание 2. Записать в предельной форме утверждение $\forall\varepsilon>0\exists M>0\forall x\in E(x<-M\Rightarrow|f(x)-1|<\varepsilon)$. Приведите графический пример функции с указанным свойством и изобразите построение числа M по заданному ε.

Задание 3. Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln x-\ln 3}{x-3}$, б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)tgx$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}(2x+1)^{\frac{3+x}{x}}$, г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3-\sqrt{x^2+9}}{x^2}$, д) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x}$.

Задание 4. Исследовать функцию на непрерывность и построить ее график:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3x+2, & при \quad x<3{,}5\\ \dfrac{1}{\pi}\arccos(2x-7), & при \quad 3{,}5\le x<4\\ \log_2\dfrac{1}{2x-6}, & при \quad x\ge 4\end{cases}$$

Задание5. Докажите, что функция $f(x)=\sqrt[3]{x}$ не является дифференцируемой в точке $x=0$.

Задание 6. Вычислите производные y′, если: а) $y=\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}+arctg\sqrt{x}$,

б) $y=\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{x+4}{x^2-3x}+\dfrac{\sqrt{2}}{3\sqrt[3]{x}}-\dfrac{tgx}{e^2}$, в) $y=(2x-1)^3\arccos\dfrac{1}{2x-1}$, г) $y=3^{\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}}$.

Задание 7. Используя логарифмическое дифференцирование вычислить y′:

$$y=\frac{\sqrt[3]{x+1}\cdot\sqrt[5]{(x-3)^2}}{\sqrt{(x-4)^3}}$$

Задание 8. На кривой $y=\log_2 x$ найти точку, в которой касательная к кривой перпендикулярна прямой $x+2y+1=0$.

Задание 9. Исследовать функцию и построить график: $y=\dfrac{3-x^2}{x+2}$.

Задание 10. В фигуру, ограниченную линиями $y = 3x$ и $y = x^2$, вписан прямоугольник наибольшей площади так, что две его вершины лежат на прямой, а две другие на - параболе. Найти эту площадь.

Тема 2. Интегральное исчисление функций одной переменной.

Вариант 1.

Задание 1. Найти неопределенные интегралы. Результат проверить дифференцированием.

а) $\int \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$, б) $\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx$, в) $\int \sqrt[5]{x}\ln x dx$, г) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-7x+3x^2}}$, д) $\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx$.

Задание 2. Вычислить определенные интегралы.

а) $\int\limits_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}}dx$, б) $\int\limits_8^{12} \sqrt{\frac{4-x}{x-12}}dx$, в) $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{6\sin^2 x}{3\cos 2x-4}dx$, г) $\int\limits_1^2 x\log_2 x dx$.

Задание 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = (x-2)^2 \text{ и } 4x - y - 8 = 0$$

Задание 4. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси ординат фигуры, расположенной в первой четверти и ограниченной линиями:

$$y = 2 - x^2; \quad y = x; \quad x = 0$$

Задание 5. Вычислить Длину дуги, заданной уравнением в прямоугольной системе координат: $y = \ln x, \quad \sqrt{3} \le x \le \sqrt{15}$.

Задание 6. Вычислить длину дуги, заданной параметрически уравнениями:

$$x = 5(t - \sin t), \quad y = 5(1-\cos t), \; 0 \le t \le 2\pi .$$

Задание 7. Вычислить длину дуги кривой, заданной в полярных координатах:

$$\rho = 2(1-\cos\varphi), \quad 0 \le \varphi \le \pi$$

Задание 8. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OX дуги синусоиды: $y = \sin x$ от $x = 0$ до $x = \pi$.

Задание 9. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{arctgx}{x^2}dx \; ; \quad \int\limits_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}} .$$

Задание 10. Для функции $f(x) = \sin x$ найдите на сегменте $[0,\pi]$ значение верхней и нижней интегральных суммы Дарбу соответствующих разбиению отрезка $[0,\pi]$ на три равные части.

Вариант 2.

Задание 1. Найти неопределенные интегралы. Результат проверить дифференцированием:

а) $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}dx$, б) $\int \frac{\cos xdx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}dx$, в) $\int \ln(x^2+1)dx$, г) $\int \frac{x+1}{x^3+4x^2+5x}dx$, д) $\int \frac{arctg^5 xdx}{1+x^2}$

Задание 2. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}$, б) $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{2\cos x+3}$, в) $\int\limits_1^2 x^2 \ln x dx$, г) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin 2x dx$

Задание 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=\frac{2}{x};\quad y=x+1;\quad x=3$$

Задание 4. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси ординат фигуры, ограниченной линиями:

$$y=3-x^2;\ \ y=x^2+1.$$

Задание 5. Вычислить длину дуги, заданной уравнением в прямоугольной системе координат:

$$y^2=\frac{4}{9}(2-x)^3,\ от\ \ x=-1\ до\ x=2.$$

Задание 6. Вычислить длину дуги, заданной параметрически уравнениями:

$$x=e^t\sin t,\quad y=e^t\cos t,\ \ 0\le t\le\frac{\pi}{2}.$$

Задание 7. Вычислить длину дуги кривой, заданной в полярных координатах:

$$\rho=1-\sin\varphi,\quad -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{-\pi}{6}$$

Задание 8. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OX дуги кривой $y^2=4+x$, отсеченной прямой $x=2$.

Задание 9. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

$$\int_1^{+\infty}\frac{xdx}{x^4+9}\ ;\qquad \int_0^1\frac{dx}{x\sqrt{x^2}-1}.$$

Задание 10. Для функции $f(x)=\cos x$ найдите на сегменте $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ значение верхней и нижней интегральных суммы Дарбу соответствующих разбиению отрезка $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ на четыре равные части.

Тема 3. Ряды

Вариант 1.

Задание 1. Исследовать сходимость знакоположительных рядов:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)3^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2n^2+1}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^4+2n^2}{n^4+1}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{3n+1}$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!\left(\frac{2}{n}\right)^n$; 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}2^{\sqrt{n}}}$

Задание 2. Докажите следующий достаточный признак расходимости положительных рядов:

Если члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *неотрицательны и существует конечный* $\lim\limits_{n\to\infty}na_n\neq 0$, *то ряд расходится.*

Используя сформулированное выше утверждение, доказать расходимость рядов:

8)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$; 9)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\ln\frac{3n^2+1}{n^2}$

Задание 3. Пользуясь определением, установить сходимость или расходимость данного ряда. В случае сходимости найти его сумму.

$$10)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

Задание 4. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\ln n}{\sqrt[3]{n^4}+n}$; 2. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}+(-1)^n}$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin^2 n}{n}$;

4. $\sum\frac{(-1)^{n-1}}{n+1}\left(2+\frac{1}{n}\right)$ в случае сходимости этого ряда, найти его сумму.

5. $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\ldots$ (два плюса, два минуса и т.д.). Установить сходится ли этот ряд?

Задание 5. Найти область сходимости степенного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot x^{n-1}}{3^n\cdot n}$$

Задание 6. Найти сумму степенного ряда и указать область сходимости:

$$\sum_{n=0}^{\infty}nx^{2n-1}$$

Задание 7. Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки x_0. Указать область сходимости найденного ряда к своей сумме.

$$f(x)=\ln(5x+3),\quad x_0=1$$

Задание 8. Доказать равномерную сходимость ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{x+5^n},\quad(-5,+\infty)$$

Задание 9. Пользуясь разложением данной функции в ряд Тейлора, вычислить производную указанного порядка:

$$f(x)=(x-1)^2\ln x;\qquad f^{(5)}(1)=?$$

Задание 10. Вычислить с помощью разложения в ряд подынтегральной функции определенный интеграл:

$$\int_0^{0,2}\frac{\sin x}{x}dx$$

Вариант 2

Задание 1. Исследовать сходимость знакоположительных рядов:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n}{(n+1)3^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2n^3+3}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^4+2n^2}{n^4+1}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+1}{3n^2+2}\right)^n$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+\ln n}$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!\left(\frac{2}{n}\right)^n$; 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}3^{\sqrt{n}}}$

Задание 2. Докажите, что если общий член ряда представим в форме $a_n = b_{n+1} - b_n$, то сумма ряда вычисляется по формуле $S = \lim\limits_{n\to\infty} b_n - b_1$. Пользуясь этой формулой найти сумму ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{3}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}\right]$$

Задание 3. Пользуясь определением, установить сходимость или расходимость данного ряда. В случае сходимости найти его сумму.

$$10)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+1}\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

Задание 4. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}n^2}{\left(2+\dfrac{1}{n}\right)^n}$; 2. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\ln(n+1)}$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\sin 3^n}{3^n}$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt[4]{2n+3}}$

5. $1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{9}+\dots$ (два плюса, один минус и т.д.). Установить сходится ли этот ряд?

Задание 5. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(3x-4)^n}{3^n}$$

Задание 6. Найти сумму степенного ряда и указать область сходимости:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+5)x^{2n}$$

Задание 7. Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки x_0. Указать область сходимости найденного ряда к своей сумме.

$$f(x)=\ln(5x+3),\quad x_0=-\frac{2}{5}$$

Задание 8. Доказать равномерную сходимость ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{x+3^n},\quad (-3,+\infty)$$

Задание 9. Пользуясь разложением данной функции в ряд Тейлора, вычислить производную указанного порядка:

$$f(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x}}\qquad f^{(6)}(4)=?$$

Задание 10. Вычислить с помощью разложения в ряд подынтегральной функции определенный интеграл с точностью до 0,001:

$$\int_5^{10}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}dx$$

Тема 4. Дифференциальные уравнения.

Вариант 1

Задание 1. Найти общее решение дифференциальных уравнений.

а) $xyy' = 1 - x^2$

б) $xdy - ydx = ydy$

в) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$

г) $(2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2 y)dy = 0$

Задание 2. Найти общие и особые решения уравнений Лагранжа и Клеро.

а) $y = xy' + \sin y'$

б) $xy' - y = \ln y'$

Задание 3. Найти линию, у которой отрезок, отсекаемый на оси ординат касательной в произвольной точке пропорционален квадрату ординаты точки касания.

Задание 4. Найти решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y'' + 4y' + 29y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 15$$

Задание 5. Найти частное решение неоднородного уравнения:

$$y'' - 3y' + 2y = e^x (3 - 4x)$$

Вариант 2

Задание 1. Найти общее решение дифференциальных уравнений.

а) $xy' + y = y^2$

б) $y^2 + x^2 y' = xyy'$

в) $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$

г) $e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0$

Задание 2. Найти общие и особые решения уравнений Лагранжа и Клеро.

а) $y = xy' + y'^2$

б) $y = yy'^2 + 2xy'$

Задание 3. Найти линию, касательные к которой отсекают на осях координат отрезки, сумма которых равна $2a$.

Задание 4. Найти решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y''(x^2 + 1) = 2xy', \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$$

Задание 5. Найти частное решение неоднородного уравнения:

$$y'' - 3y' + 2y = 2e^x \cos \frac{x}{2}$$

Варианты заданий для выполнения контрольной работы по дисциплине «Математический анализ» во 2-ом семестре

Вариант 1

1. Вычислить предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{\sin 5x}$$

2. Принимает ли функция внутри указанного сегмента заданное значение? Ответ обосновать.

$$f(x) = \frac{x^3}{4} - \sin \pi x + 3, \qquad x \in [-2, 2], \qquad f(x) = 2\frac{1}{3} \ ?$$

3. Доказать, что уравнение $4x^3 - 5x^2 - 6x + 3 = 0$ не имеет корней на промежутке $[2, +\infty)$.

4. Найдите точки экстремума и асимптоты графика функции

$$f(x) = x - \frac{\ln x}{x}$$

5. Вычислите интеграл

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2 (x+2)}$$

6. Пользуясь определением, вычислить производную $f'(x_0)$ в указанной точке

$$f(x) = \sqrt{2-x}, \quad x_0 = 1$$

7. Исследовать на дифференцируемость в точке $x = 0$ функцию

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}(1-x^2), & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Тестовые задания

1. Множеством значений постоянной функции является:

а) числовая прямая
б) точка
в) открытый отрезок
г) замкнутый отрезок

2. Результат композиции двух функций $f(g(x))$, где $f(x) = \arcsin x$, $g(x) = \sin x$ равен

а) $x, \; x \in [-1, 1]$
б) $\pi - x, \; x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$
в) $x, \; x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
г) $\pi + x, \; x \in [0, \pi]$

3. Установить соответствие определений (Ответ записывать в форме 1а, 3б, и т.п.)

1. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D(f)(|x| < \delta \to |f(x) + 1| < \varepsilon)$
2. $\forall N > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D(f)(|x| < \delta \to f(x) > N)$
3. $\forall N > 0 \exists M > 0 \forall x \in D(f)(|x| > M \to |f(x)| > N)$
4. $\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 \forall x \in D(f)(x < -M \to 1 - \varepsilon < f(x) < 1)$

а) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1 - 0$ б) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -1$ в) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

г) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$ д) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty$

Вариант 2

1. Вычислить предел

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sin(1-x)}{\sqrt{x} - 1}$$

2. Принимает ли функция внутри указанного сегмента заданное значение? Ответ обосновать.

$$f(x) = \frac{8}{\pi} arctg(x-1) + \sqrt{3}, \qquad x \in [0, 2], \qquad f(x) = 3\frac{2}{3} \;\; ?$$

3. Найти все значения параметра a при которых уравнение $x^3 - ax - 1 = 0$ имеет единственный корень.
4. Найдите точки экстремума функции

$$f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$$

5. Вычислите интеграл

$$\int_0^1 \frac{4arctgx - x}{1 + x^2} dx$$

6. Пользуясь определением, вычислить производную $f'(x_0)$ в указанной точке

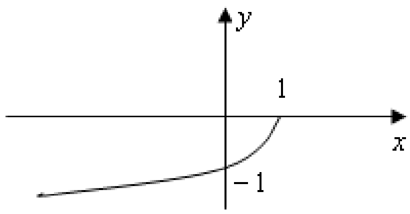
$$f(x) = x + \ln x \qquad x_0 = 2$$

7. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = \dfrac{x+1}{(x-2)^2}$ в точках перегиба.

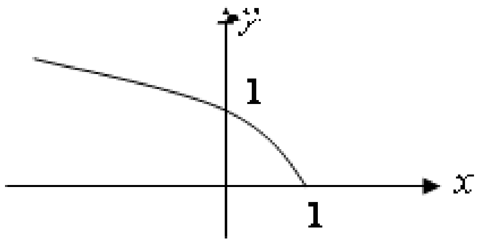
Тестовые задания

1. Графиком функции, обратной к функции $y = 1 - x^2$, при $x \le 0$ является:

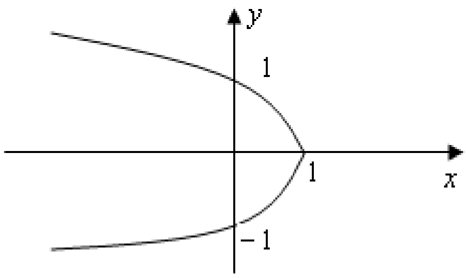
а)



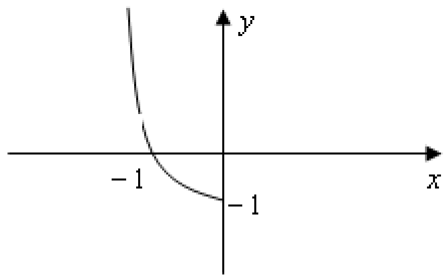
б)



в)



г)



2. Функция $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1/\pi, 0] \\ x \sin 1/x, & x \in (0, 1/\pi] \end{cases}$

а) непрерывна на $\left[-\dfrac{1}{\pi}, \dfrac{1}{\pi}\right]$
б) имеет точку устранимого разрыва $x = 0$
в) имеет в точке $x = 0$ разрыв со скачком
г) имеет в точке $x = 0$ разрыв 2 го рода.

3. Вычислить производную $f'(x)$, если $f(x)=\arccos\frac{2x+1}{\sqrt{3}x}+tg\sqrt{2}$:

а) $\frac{1}{\sqrt{x^2+4x-1}}+\frac{1}{\cos^2\sqrt{2}}$ б) $\frac{1}{x\sqrt{-1-4x-x^2}}+\frac{1}{2}$

в) $-\frac{1}{x\sqrt{-x^2-4x-1}}$ г) $-\frac{1}{x\sqrt{-x^2-4x-1}}+\frac{1}{\cos^2\sqrt{2}}$

Вариант 3

1. Вычислить предел

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{tgx}$$

2. Принимает ли функция внутри указанного сегмента заданное значение? Ответ обосновать.

$$f(x)=\frac{1}{4}\arccos\frac{1}{x}+\arcsin\frac{\sqrt{3}}{x}, \qquad x\in[-2,2], \qquad f(x)=1\frac{1}{4} \quad ?$$

3. Найти все значения *a*, при каждом из которых уравнение $3x^4+4x^3-6x^2-12x+a=0$ имеет два различных действительных корня.
4. Найдите точки экстремума функции

$$f(x)=\max\{7x-6x^2,\ |x^3|\}$$

5. Вычислите интеграл

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$$

6. Пользуясь определением, вычислить производную $f'(x_0)$ в указанной точке

$$f(x)=\ln x, \quad x_0=1$$

7. На кривой $y=\log_2 x$ найти точку, в которой касательная перпендикулярна прямой

$$x+2y+1=0$$

Тестовые задания

1. Укажите верное продолжение следующего утверждения «Если *y* = 1 есть предел функции *y* = *f*(*x*) при $x\to 0$, то …»
а) для $\varepsilon=0{,}01$ существует такое число $\delta>0$, что для всех $x\in D(f)$ из неравенства $|x|<\delta$ следует неравенство $0{,}99<f(x)<1{,}01$
б) $\exists\varepsilon>0\forall\delta>0\forall x\in D(f)(|x|<\delta\to|f(x)-1|<\varepsilon)$
в) $\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall x\in D(f)(|x|>\delta\to|f(x)|<1+\varepsilon)$
г) для $\varepsilon=0{,}01$ и для $\delta=0{,}05$, для всех $x\in D(f)$ из неравенства $|x|<0{,}05$ следует неравенство $|f(x)-1|<0{,}01$

2. Установите соответствие:
 1. x_0 - точка перегиба функции $f(x)$ а) $f''(x_0)>0$

2. x_0 - точка, критическая на перегиб б) $f''(x_0)<0$

3. Функция выпукла вверх в точке x_0 в) $f''(x_0)=0$

4. Функция выпукла вниз в точке x_0 г) $f''(x)=0$ при $x=x_0$

$f''(x)<0$ при $x>x_0$

$f''(x)>0$ при $x<x_0$

3. Укажите множество первообразных функций для функции $f(x)=\sin(2x+5)$:

а) $2\cos(2x+5)+C$ б) $-2\cos(2x+5)+C$ в) $-\dfrac{1}{2}\cos(2x+5)+C$

г) $-\cos 2x+C$

Вариант 4

1. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$$

2. Принимает ли функция внутри указанного сегмента заданное значение? Ответ обосновать.

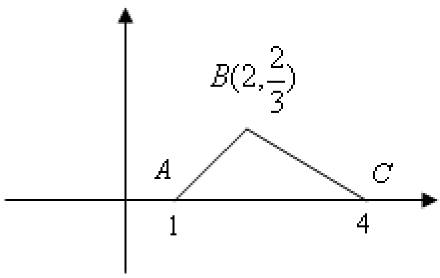
$$f(x)=\ln\frac{2-x}{2+x}+\frac{1}{\pi}\arcsin x,\qquad x\in[-1,1],\qquad f(x)=\frac{1}{3}\ \ ?$$

3.При каких значениях параметра a уравнение $x^3-12x-6=a$ имеет три различных действительных корня?

4. Исследуйте на экстремум функцию

$$y=\sqrt[3]{(x-2)(x-3)^2}$$

5. Найти значение интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, где функция $f(x)$ задана графиком



6. Пользуясь определением, вычислить производную $f'(x_0)$ в указанной точке

$$f(x)=\arcsin x,\qquad x_0=0$$

7. Написать уравнение параболы $y=x^2+bx+c$, касающейся прямой $y=x-3$ в точке $(1,-2)$

Тестовые задания

1. Укажите интервалы монотонности функции $f(x)=x+\sqrt{1-x^2}\arccos x$:

а) $(-\infty;0)$ - возрастает, $(0;+\infty)$ - убывает.

б) $(-\infty;0)$ - убывает, $(0;+\infty)$ - возрастает.

в) $(-1;0)$ - возрастает, $(0;1)$ - убывает.

г) $(-1;0)$ - убывает, $(0;1)$ - возрастает.

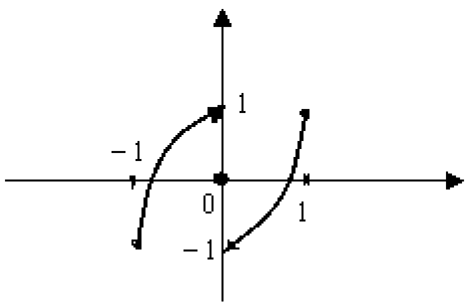
2. Для функции $f(x)=\sin x$ указать на сегменте $[0,\pi]$ значение верхней и нижней интегральных суммы Дарбу соответствующих разбиению отрезка $[0,\pi]$ на три равные части:

а) $S_D=\frac{\pi}{3}(1+\sqrt{3})$, $s_D=\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$ б) $S_D=\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$, $s_D=0$

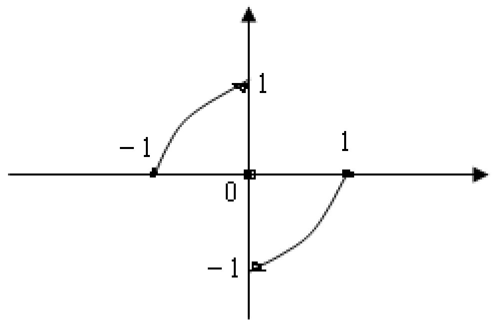
в) $S_D=\frac{\pi}{2}$, $s_D=0$ г) $S_D=\pi$, $s_D=0$

3. Укажите пример функции, изображённой графиком, опровергающий утверждение «Функция, определённая во всех точках сегмента [a, b] и ограниченная на нём, достигает на этом сегменте наибольшего и наименьшего значения»

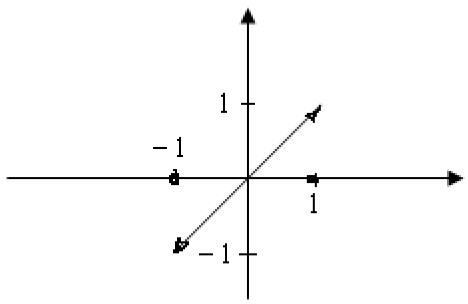
а)



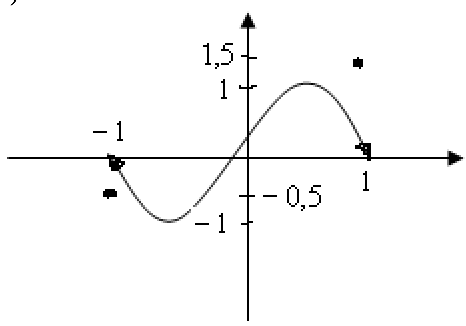
б)



в)



г)



3 Критерии оценки контрольной работы по дисциплине

- оценка **«зачтено»** выставляется по результатам защиты контрольной работы, если работа имеет высокое качество, в ответах студента содержатся элементы творчества, делаются грамотные самостоятельные выводы и обобщения, приводится аргументированный критический анализ теоретической литературы на основе глубоких знаний в области изучения закономерностей явлений и процессов, происходящих в практической деятельности. Процент выполнения контрольной работы составил более 50 %;
- оценка **«не зачтено»** выставляется по результатам защиты контрольной работы, если работа полностью не отвечает требованиям ее выполнения, студент не может ответить на вопросы преподавателя, не владеет материалом работы. В этом случае научный руководитель устанавливает дату дополнительных консультаций и срок повторной защиты контрольной работы с доработкой представленных материалов. Процент выполнения контрольной работы составил менее 50 %.